

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -****CLASA A X-A
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiect 1, autor ***

Fie un număr real $a > 0$. Să se arate că funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dată de $f(n) = n + [a\sqrt{n}]$ este injectivă și nesurjectivă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Funcția f este suma funcțiilor $n \mapsto n$ (strict crescătoare) și $n \mapsto [a\sqrt{n}]$ (crescătoare)	2p
Deoarece este strict crescătoare, funcția este injectivă	2p
Deoarece șirul $(a\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ este nemărginit, există m astfel încât $[a\sqrt{m}] < [a\sqrt{m+1}]$	1p
Atunci $f(m+1) \geq f(m) + 2$, deci funcția nu ia valoarea $f(m) + 1$	2p

Subiect 2, prelucrare ***

Fie z un număr complex. Să se arate că $\sqrt{2}|z+1| = |z+i| + |z-i|$ dacă și numai dacă $|z|=1$ și $\operatorname{Re}(z) \geq 0$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ avem $ z+1 = \sqrt{(a+1)^2 + b^2}$, $ z+i = \sqrt{a^2 + (b+1)^2}$, $ z-i = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$,	2p
Egalitatea inițială este echivalentă cu $2(a+1)^2 + 2b^2 = a^2 + (b+1)^2 + a^2 + (b-1)^2 +$ $+ 2\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4b^2}$, adică $2a = \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4b^2}$	2p
Aceasta este echivalent cu $a \geq 0$ și $4a^2 + 4b^2 = (a^2 + b^2 + 1)^2$	1p
Ultima egalitate revine la $(a^2 + b^2 - 1)^2 = 0$, adică $a^2 + b^2 = 1$, q.e.d.	2p

Subiect 3, autor *Traian Tămăian* – GM 2/2013

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$2^{\sin 3x} - 8^{\sin x} = \sin^3 x.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$	1p
Ecuația se scrie echivalent $2^{\sin 3x} + \frac{\sin 3x}{4} = 2^{3\sin x} + \frac{3\sin x}{4}$	2p
Dacă definim $f(t) = 2^t + \frac{t}{4}$, $t \in \mathbb{R}$, atunci funcția $t \mapsto f(t)$ este strict crescătoare, deci ecuația, care se scrie $f(\sin 3x) = f(3\sin x)$, este echivalentă cu $\sin 3x = 3\sin x$	2p
Obținem $\sin^3 x = 0$, cu soluțiile $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	2p

Subiect 4, autor *Eugen Radu*

Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[3]{x^6 + 7x^3} = \sqrt{x^4 + 8x} - x^2.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Expresiile sunt definite pentru $x \in (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$	1p
Observăm că o soluție este 0	1p
Pentru $x \neq 0$, ecuația se scrie $x\sqrt[3]{x^3 + 7} = \frac{8x}{\sqrt{x^4 + 8x} + x^2}$, sau $\sqrt[3]{x^3 + 7}(\sqrt{x^4 + 8x} + x^2) = 8$	3p
Pentru $x > 0$ expresia din membrul stâng definește o funcție strict crescătoare, deci în acest caz soluția evidentă $x = 1$ este unică	1p
Pentru $x \leq -2$ expresia din membrul stâng este negativă, deci soluțiile ecuației sunt 0 și 1	1p